吹送流が形成するEkman螺旋とEkman輸送に関する考察

本論文 Journal of National Fisheries University 57 (4) 247－254 (2009)

吹送流が形成するEkman螺旋とEkman輸送に関する考察

安田秀一

Analysis on the Ekman spiral and the Ekman transport of the wind drift current under the Earth rotation effect

Hideichi Yasuda

Abstract：The formation process of the Ekman spiral and the behavior of the Ekman transport have been examined through the analysis of the motion equation. This analysis has revealed that the Ekman spiral is similar to the Stokes boundary layer fundamentally and that the steady drift current generally known is not the current at the passage of long time but merely the inertia-periodically averaged current. The usual idea that the Ekman transport flows in the rightward direction is also the result of the inertia-periodical average of the volume transport of the drift current.

Key words : Drift currents, the Earth rotation effect, Ekman spiral, inertia current, Ekman transport

はじめに

瀬戸内海のような潮汐の卓越する沿岸海域においては，海水の流動は潮汐振動流が支配的とされているが，周防灘の観測結果によると[1]，潮流の観測データから潮汐振動成分を除去した残渣成分も，水深に関わらず複雑に変動しながら，かなり優勢な流れとして得られた。沿岸海域の潮流観測を続けてきた海上保安庁水路部は，潮流の25時間平均値を“恒流”と呼び，それぞれの海域における特有な流れとしているが，Fischer[2] 以来，恒流成分は物質輸送に及ぼす重要な流れとされてきた。周防灘の観測結果からもわかったことであるが，実際に測定される25時間平均流はかなり変動的で，“恒流”という言葉には馴染むとは思えない。平均流に関しては，その原因と考えられる，密度流，吹送流，潮汐残差流に分けてそれぞれの生成過程やメカニズムを解明し，沿岸域での振舞いや影響を理解する必要があると考える。

吹送流の最も単純なモデルとして，Ekman螺旋を形成する流れがあまりにも有名で，海洋物理学の入門書[3),4)] にはその解説は欠かせない。その印象が強いために，沿岸海域の物質輸送を議論するときに，それが定常流を仮定して得られたものであるにも係わらず，非定常的な沿岸海域にそれを導入して，物質輸送量を算出するというような解析がなされることもある[5)]。瀬戸内海のような潮汐潮流の卓越した海域では，物質輸送は潮汐振動流による海水交換や分散効果の影響も大きく受けており，振動成分を無視して瀬戸内海を湖のように定常成分のみで考察したのでは，実際の現象と大きくかけ離れた結果に行き着くことは容易に想像できる。吹送流においても，地球自転効果を考慮すれば，慣性円運動は無視できるはずもなく，吹送流を定常流として扱える条件などは，明瞭に整えておく必要があると考える。

Lewis & Belcher[6)] は，Ekman層形成に関わる吹送流の最近の成果を整理し，Laplace変換を適用して発達期から定常状態に至る解を再提示している。その定常状態に至る説明を読むと，定常状態がEkmanの定常解に収束するというように読み取れるが，その一方，Gillの教科書[7)] の中には，表層に混合層が形成されて風の応力が海底まで伝わらなくなると，慣性円運動は消えることなく，定常状態においても，一般によく知られているEkman輸送の形態（北半球では風の方向に対して直角右方向に海水は輸送される）にはならないことを示している。本研究では，この矛盾の

2008年10月6日受付．Received October 6，2008.
水産大学校水産学研究科（Graduate School of Fisheries Science, National Fisheries University）
† 別刷り請求先（Corresponding author）：yasuda@fish-u.ac.jp

払拭も目指しながら，Ekman螺旋や慣性流の物理的な特性を明らかにし，沿岸海域の物質輸送の研究への橋渡しとなるよう，自転影響下の吹送流の基本的な性質の解明を図った。また，著者は学内の共通科目である基礎物理学の担当教員であり，今はなくなったが，応用物理学（主に流体力学入門）も担当していた。若者の理科離れが進む中，基礎を勉強してもらいたいとの思いから，教養課程で学習する応用数学程度の演習問題ということも念頭に海洋の基礎現象の解析を試みる。

Ekman輸送の解

従来のEkman輸送が，実際の海域ではどのように適用できるかを検討するために，まず，突然に風が吹き始めたときに海水の体積輸送volume transportがどのように応答するかを調べる。突然の風は不自然に感じられるが，その解を知ることによって，より自然に時間的に変動する場合の解も，後で示すDuhamelの方法で容易に求めることができる。基本的なプロセスを明らかにすることを目的にしていることから，モデルはできるだけ簡略化する。そのモデルは，海は非常に広く，風はその上を一様に一定の応力で吹くものとし，そのため，海水の水平粘性率は無視し，鉛直粘性率μは一定値とする。また，海水の密度分布は考慮せず，運動方程式は次のように書き表すことができるとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \frac{\partial v}{\partial t}+fu=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad (1),(2)$$

流動はx-y方向の水平面内のみに生成され，uとvは，それぞれ流速のx方向とy方向の成分を表す。運動方程式のバランス上，μは動粘性率ということになるが，海水の密度は1としてもメカニズムやプロセスには問題は生じない。fはコリオリパラメータで一定値とし，海は非常に深い，つまり海底からの摩擦を受けることがない程深いとする。風は，時刻$t=0$において北向き（ここではy方向とする）の一様な応力τ_sが与えられたとする。なお，μを動粘性率としたことから，τ_sは次元的に海水密度で除した比応力になっていることに注意する必要がある。海域は十分に広いために海面の高さは変動しないと考える。Ekman輸送を求めるために，式(1)と(2)を鉛直方向に海面から海底まで積分すると，次のように書き直すことができる。

$$\frac{\partial U}{\partial t}-fV=0,\quad \frac{\partial V}{\partial t}+fU=\tau_s \qquad (3),(4)$$

UとVはそれぞれ流速成分uとvの鉛直積分量である。$U+iV=Q$で表すことができるベクトルQを導入すると，これらの式は次のようになる。ただし$i=(-1)^{1/2}$のことである。

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+ifQ=i\tau_s \qquad (5)$$

初期条件を$Q=0$（at $t=0$）とすると，$Q(t)$は次のように求められる。

$$Q(t)=\frac{\tau_s}{f}\left[1-\exp(-ift)\right] \qquad (6)$$

それぞれの成分に分解すると，$U(t)=\tau_s/f\cdot(1-\cos ft)$，$V(t)=\tau_s/f\cdot\sin ft$となり，円運動が消えることなく続く様子が見て取れる。この円運動は角速度がfで，慣性円運動といわれるものである。つまり，一般に知られている，“一様な風が吹くと体積輸送は右方向に引き起こされるEkman輸送を形成する”ということでもなさそうである。ただし，慣性周期（$=2\pi/f$）で平均した場合は，$U^*=\tau_s/f$, $V^*=0$で通常のEkman輸送そのものである。*は周期平均を表している。(6)と同様のベクトル表示をすると$Q^*=\tau_s/f$のようになる。

Gillの教科書[7)]では，上層の混合層を考慮して，その層の流動がその下の層に伝わりにくいために式(6)のような解が得られるとしている。そのモデルは上層に混合層を想定しており，境界条件は，海面でy方向にτ_sの風応力の他に，混合層と下層の間で摩擦応力0（$-\mu\partial v/\partial z=0$）ということになるが，その時の吹送流の解に関しては，後の，節で補足説明として述べる。

式(6)は，流れに摩擦抵抗がないとした場合の体積輸送となっているが，実際の海域で，特に水深の浅い沿岸海域では，海底や地形の複雑さに伴う摩擦抵抗は不可欠と考えられる。ここでは，その原因は兎も角として，流れの強さに比例するという最も簡単な摩擦抵抗$-RQ_F$（Rは定数と仮定した摩擦抵抗係数，添字Fは摩擦がある場合を示す）を導入すると，(5)の基礎式は$\partial Q_F/\partial t+ifQ_F=i\tau_s-RQ_F$と書き改められ，同様の初期条件の下で，次のような解を得ることができる。

$$Q_F(t)=\frac{\tau_s}{R^2+f^2}(f+iR)\left[1-\exp\{-(if+R)t\}\right] \qquad (7)$$

この式を検討すると，抵抗係数Rが大きくなるにしたがって，慣性円運動は速やかに減衰し定常状態になるが，その値は$Q_F(t\to\infty)=\tau_s(f+iR)/(R^2+f^2)$となり，一般的にいわれているEkman輸送の方向から反時計回りに$\tan^{-1}(R/f)$の角度ほどずれることになる。沿岸海洋研究者にとっては，風が吹けば海水は右側に輸送されるという安易

な想定には注意を払う必要がある。摩擦抵抗係数が小さい場合には，慣性振動はなかなか消えず，逆に大きい場合は，慣性振動は消えやすいものの輸送の方向は風の方向に近づくということになる。

Ekman螺旋の形成と慣性流

海面を風が吹いたときの海水の流動は，Ekman層を形成する吹送流として，海洋物理学の最も基本的な現象（もしくは概念）であり，この分野の教科書ではこのことが省かれることはない。流動を支配する運動方程式の中に地球自転効果（コリオリ効果）を考慮して吹送流を求めると，Ekman螺旋を形成した流れが求められるということは，確かに海洋の基本的な物理現象としてよく知られているが，Ekman螺旋の形成理由やその下の層では流れが引き起こされない理由が論じられたことはないのではないかと思われる。先に述べたEkman輸送の問題の解決も考慮に入れて，Ekman螺旋の基本的な振る舞いとその形成理由を以下に考察する。なお本研究においては，沿岸海域にも適用できるように水深は有限のh（一定と仮定）として解析し，適宜，水深が無限に深い場合のコメントも記していく。

慣性系における定常風による吹送流

Ekman螺旋は，自転効果がある中（以下回転系とする）で，定常的な風が吹いた場合に定常状態の運動方程式を解いて得られた境界層内の現象であるが，自転効果がない場合（以下慣性系とする）には，定常流中の境界層は，固体壁に沿って流下方向に徐々に厚くなり，次第に全水深が境界層になることが知られている。このことは見方を変えると，慣性系においては，風が広い海上を吹き始めた場合には，時間の経過とともに吹送流の厚さは深くなり，次第に全水深で流れが生じることに相当する。このような流れ$v(z,t)$を支配する最も単純な形の運動方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{8}$$

風はy方向で，水面での応力はτ_sで一定一様なものとする。初期条件は式(2)の場合と同じで，その境界条件は$-\mu\partial v/\partial z=\tau_s$（$z=0$；水面）と$v=0$（$z=h$；底面）とする。ここでは，特別解を直接求める困難さを避けるために，この発達期の解$v(z,t)$を定常解$v_1(z)$と減衰解$v_2(z,t)$の差で置き換え，定常解と減衰解を求めることにする。なお，式(8)のμは動粘性率としたことから，風応力τ_sは，通常の応力ではなく，次元的に海水の密度で割ったものである。

定常解$v_1(z)$に関する方程式は$0=\mu\partial^2 v_1/\partial z^2$で，境界条件は$\mu\partial v_1/\partial z=-\tau_s$（$z=0$；水面）と$v_1=0$（$z=h$；底面）とすると，定常解は次のように求められる。

$$v_1(z)=\frac{\tau_s}{\mu}(h-z) \tag{9}$$

減衰解$v_2(z)$に関する運動方程式は，非定常項が加わって$\partial v_2/\partial t=\mu\partial^2 v_2/\partial z^2$となり，境界条件，$\mu\partial v_2/\partial z=0$（$z=0$；水面）と$v_2=0$（$z=h$；底面）の元で，$v_2(z,t)=Z(z)\cdot Y(t)$で変数分離し与式に代入すると，$1/\mu Y\cdot dY/dt=1/Z\cdot d^2Z/dt^2$となる。それを$-\alpha^2$に等しいとすると，次のような二つの常微分方程式に分けることができる。

$$\frac{dY}{dt}=-\mu\alpha^2 Y,\quad \frac{d^2Z}{dz^2}=-\alpha^2 Z \tag{10), (11}$$

それぞれの一般解は容易に求めることができ，$v_2(z,t)$に関する一般解は次のように書き表すことができる。

$$v_2(z,t)=\exp(-\mu\alpha^2 t)\{C_1\cos\alpha z+C_2\sin\alpha z\} \tag{12}$$

積分常数C_2は，$z=0$における境界条件を考慮すると0で，$v_2(z,t)=C_1\exp(-\mu\alpha^2 t)\cos\alpha z$となり，$z=h$の境界条件から$\cos\alpha h=0$となる。従って$\cos$の中の$\alpha h$は$\alpha_n h=(2n+1)\pi/2$で満たされ$\alpha_n=(2n+1)\pi/2h$になる。$\alpha_n$は固有値と呼ばれるもので，$n=0,1,2,3,\cdots\cdots$である。これらのことから特別解は次のように表される。

$$v_2(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_{2n}(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\exp(-\mu\alpha_n t)\cos\alpha_n z \tag{13}$$

係数B_nは，$t=0$において$v_2(z,0)=v_1(z)$であることから決まる。

$$v_2(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}v_{2n}(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cos\alpha_n z=\frac{\tau_s}{\mu}(h-z)$$

このことからB_nは，

$$B_n=\frac{2\tau_s}{h\mu}\int_0^h(h-z')\cos\alpha_n z'dz'=\frac{2\tau_s}{h\mu}\frac{1-\cos\alpha_n h}{\alpha_n^2}$$
$$=\frac{2\tau_s}{h\mu\alpha_n^2}$$

特別解$v_2(z,t)$を改めて書き記すと，次のようになる。

$$v_2(z,t)=\frac{2\tau_s}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(-\mu\alpha_n^2 t)}{\mu\alpha_n^2}\cos\alpha_n z \tag{14}$$

従って，発達期の解$v(z,t)$は，

$$v(z,t)=v_1(z)-v_2(z,t)=\frac{2\tau_s}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\exp(-\mu\alpha_n^2 t)}{\mu\alpha_n^2}\cos\alpha_n z \tag{15}$$

のように導くことができる。基本方程式や境界条件からも

わかるように，この現象は，拡散物質が海面から連続的に一定量投入され，その物質が深い方に拡散されて，次第に全水深に行き渡ることと同じである。

後の考察のためにも，hが無限に深い場合の解も出しておく。その場合にはFourier級数はFourier積分に変換する必要があり，$v(z,t)$は

$$v(z,t)=\frac{2\tau_s}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\alpha_n z\int_0^t\exp(-\mu\alpha_n^2t)\,dt$$
$$=\frac{2\tau}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\alpha_n z\left(\frac{\pi}{h}\right)\int_0^t\exp(-\mu\alpha_n^2t)\,dt$$

さらに，$\alpha_n=(2n+1)\pi/2h=\alpha$，$d\alpha=\pi/h$とおくと，

$$v_\eta(z,t)=\frac{2\tau}{\pi}\int_0^\infty\cos\alpha z d\alpha\int_0^t\exp(-\mu\alpha^2t)\,dt$$
$$=\frac{2\tau}{\pi}\int_0^t\int_0^\infty\exp(-\mu\alpha^2t)\cos\alpha z d\alpha\,dt$$
$$=\frac{2\tau}{\pi}\int_0^t\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu t}}\exp\left(-\frac{z^2}{4\mu t}\right)dt$$
$$=\frac{\tau}{\sqrt{\pi\mu}}\int_0^t\frac{\exp(-z^2/4\mu t)}{\sqrt{t}}dt \qquad (15)'$$

添字ηはFourier積分を適用して水深を無限にしたことを示すものである。これは一般の応用数学の教科書に出ている次の公式を利用している。

$$\int_0^\infty\exp(-bx^2)\cos ax dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp(-a^2/4b)$$

式(15)'も，式(15)同様，一次元の拡散方程式の解で，水面で引き起こされた現象は時間と共に深い方に拡散していくことを示すものである。(15)の場合は海底が拡散物質のシンクになっており，(15)'の場合は，z方向に無限に広がる半無限の拡散解となって，“定常解は存在しない”ということを述べておく。

振動系におけるStokes境界層の振舞いとその基本的性質

潮流のような振動流は，Lambの流体力学の古典的な教科書[8]にも示されているように，海底上にStokes境界層を形成することが知られているが，次に，風が振動した場合の水の動きを考えてみる。今，y方向に直線的に振動する風が海上を吹き始めたとし，海面における境界条件を，$-\mu\partial v/\partial z=T_0\sin\omega t$ ($z=0$；水面，$t>0$) で与えると，式(15)を$v(z,t;\tau_s)$と表して，Duhamelの方法を適用して次の式からそのときの流れ$v_T(z,t)$を求めることができる。

$$v_T(z,t)=\int_0^t\frac{\partial v\{z,t-t';T_0\sin\omega t'\}}{\partial t}dt' \qquad (16)$$

これを計算すると，

$$v_T(z,t)=\frac{2T_0}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega\exp(-A_nt)-\omega\cos\omega t+A_n\sin\omega t}{A_n^2+\omega^2}\cos\alpha_n z \quad (17)$$

のように整理することができる。ただし$A_n=\mu\alpha_n^2$である。しかしこれは流れの起こり始めの初期状態も含んでFourier級数となり，一見複雑に見える。始めから風の振動成分のみを考慮したらどうなるのであろうか？

流れの時間依存性はωによる振動成分のみであることから$v_T(z,t)=\mathrm{Re}[V_T(z)\exp(i\omega t)]$と仮定する。式(8)の形の運動方程式に代入すると，

$$i\omega V_T=\mu\frac{\partial^2V_T}{\partial z^2} \qquad (8)'$$

のような$V_T(z)$に関する二階常微分方程式を得る。この一般解は$V_T(z)=C_1\exp\{(1+i)\beta_Tz\}+C_2\exp\{-(1+i)\beta_Tz\}$となり，海底$z=h$では$V_T=0$とすると，特別解は次のように求めることができる。

$$V_T(z)=-\frac{T_0\sinh(1+i)\beta_T(h-z)}{\mu(1+i)\beta_T\cosh(1+i)\beta_Th} \qquad (17)'$$

水深が非常に大きく，深いところでは風の影響はない（吹送流は生じない）とすると，特別解はさらに簡略されて次のように表すことができる。

$$V_{\eta T}(z)=-\frac{T_0(1+i)}{2\mu\beta_T}\exp\{-(1+i)\beta_Tz\} \qquad (17)''$$

ここに，β_Tは$(\omega/2\mu)^{1/2}$のことで，その逆数はStokes境界層厚の代表寸法といわれ，Lambの教科書などの底面（固体壁）上に形成されるStokes境界層と物理的に同じものである。なお，実質的にはその3倍程度が境界層のシアー領域となっている[8]。式(17)は，時間が経過すると分数部の分子内の第一項の減衰項が消え，単なる振動流を表すが，水深が大きい場合には，この解は$\mathrm{Re}[V_{\eta T}(z)\exp(i\omega t)]$に等しくなるといえる。なお，ここでも添字$\eta$は水深が無限大の場合を示す。この流れはStokes境界層といわれるシアー領域のみに限定され，定常流のように流れが深いところまで浸透することはない。振動風に引き起こされた流れは，鉛直粘性によって，表面から深い方に分散されるが，十分に流れが伝わるまでにすでに表層では流れが逆転することから，結果的に流れが深部まで浸透しきらないということになる。境界層の厚さは，式で示すと$(2\mu/\omega)^{1/2}$に比例しており，現象の考察から振動数の逆数と粘性率に依存していることは理にかなっているといえる。

回転系で形成されるEkman境界層

回転系におけるEkman境界層は定常風に伴う定常流によるものであるにも拘わらず，流れはEkman境界層の中に留

まってしまうことはよく知られている。回転系であるがために運動方程式の中にコリオリ項が入ったことでこのような現象になったわけであるが，ここではその物理的解釈を明瞭にするため，運動方程式の解析を加えながら考察する。

運動方程式(8)は，非回転系つまり慣性系のものであるが，回転系において風が吹いた場合には，コリオリ効果によって流れは水平面で二次元的になる。従って，回転系における運動方程式は，はじめに示した(1)，(2)のとおりである。スカラー量である速度成分uとvを複素数を用いて$W_R=u+iv$のように複素表記によるベクトルで表示すると，運動方程式は次のように書き改められる。

$$\frac{\partial W_R}{\partial t}+ifW_R=\mu\frac{\partial^2 W_R}{\partial z^2} \tag{18}$$

運動方程式(8)に相当する，慣性系における運動方程式はコリオリ効果を表す項が消えて

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 W_i}{\partial z^2} \tag{19}$$

と書き表される。各式の添字Rとiは，それぞれ回転系もしくは慣性系であることを示している。これら両式は$W_R(z,t)=W_i(z,t)\exp(-ift)$で関連づけることができる。このことは，回転系で$y$方向に一様に吹く風($-\mu\partial W_R/\partial z=iT_0$ at $z=0$)は，慣性系で見ると海面$z=0$において

$$-\mu\frac{\partial W_i}{\partial z}=iT_0\exp(ift) \quad t\geq 0 \tag{20}$$

となる。右辺は$i\exp(ift)=-\sin ft+i\cos ft$であることから，風向が角速度$f$で反時計回り（低気圧性）に回転する風に対応づけることができる。解(15)は，海面での風応力が，虚数軸方向(y方向)のみに吹いた場合の虚数軸方向成分の流れであり，実数軸方向成分の流れはなしということを示している。風応力がy方向に与えられた場合に引き起こされる吹送流ベクトルを$W_{iy}(z,t)$とすると，そのときの海面での境界条件は，$-\mu\partial W_{iy}/\partial z=iT_0$で表され，その解は(15)より次のように書き表される。

$$W_{iy}(z,t)=\frac{2iT_0}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\exp(-\mu\alpha_n^2 t)}{\mu\alpha_n^2}\cos\alpha_n z \tag{15'}$$

Duhamelの方法(16)を適用すると，(22)のような時間的に依存する境界条件の解$W_i(z,t)$を求めることができ，その解は次のようになる。

$$W_i(z,t)=\frac{2iT_0}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha_n z}{if+\mu\alpha_n^2}[\exp(ift)-\exp(-\mu\alpha_n^2 t)] \tag{21}$$

時間が十分に経過して[　]内の第2項が消えると，風応力と同様の周期で低気圧の方向に回転状に振動する流れとなる。

この振動を前提にすると，時間依存性は振動成分のみが残り，流れ$W_{i\infty}(z,t)$は$Ui(z)\exp(ift)$で変数分離することができ，$Ui(z)$に関する運動方程式は，$ifUi=\mu d^2Ui/dz^2$と簡略化され，海面での境界条件は，$-\mu dUi/dz=iT_0$と表すことができる。海底$z=h$における境界条件は$W_{i\infty}(h,t)=0$であるが，水深が大きい場合には表層の振動流は深部にまで伝搬しないことから，解の簡単化のために無限深を仮定すると，$Ui(z)$および$W_{i\infty}(z,t)$は次のように表される。

$$Ui(z)=\frac{T_0}{2\beta_f\mu}(1+i)\exp\{-(1+i)\beta_f z\} \tag{22}$$

$$W_{i\infty}(z,t)=\frac{T_0}{2\beta_f\mu}(1+i)\exp\{-(1+i)\beta_f z\}\exp(ift) \tag{23}$$

なお$\beta_f=(f/2\mu)^{1/2}$で，その逆数は回転的な振動をする場合の境界層厚の代表寸法で，前節の直線的なStokes境界層と同様に，その3倍程度が実質的なシアー領域と見なすことができる。fはコリオリパラメータで，慣性円運動の角速度であり，慣性振動の振動数でもある。なお，海面では$W_{i\infty}(0,t)=T_0(1+i)\exp(ift)/2\beta_f\mu$となり，“海面での吹送流は風応力$iT_0\exp(ift)$に比べて45°遅れて反時計廻りに回転している”ことがわかる。また，海面での吹送流は，鉛直粘性率μによって徐々に深部に伝達されるが，現象のプロセスを推測すると，深部では回転的な振動の位相が徐々に遅れることになる。この45°の遅れや深部に徐々に遅れる位相が後で重要な意味を持ってくる。

回転系と慣性系の関係式が$W_R(z,t)=W_i(z,t)\exp(-ift)$で示されることから，回転系の流れは，慣性系の流れに$\exp(-ift)$を乗じることによって得ることができる。海面での境界条件にもこれを乗じると，(20)で与えた慣性系における回転風は，回転系では時間変動は消え，y方向に直線的に一様に吹く風となる。回転系においてy方向に直線的な一様風が吹いた場合の解，つまり，海洋物理学の教科書でよくお目にかかる吹送流は(21)と(23)の場合に相当し，それぞれは次のように表される。

$$W_R(z,t)=W_i(z,t)\exp(-ift)$$

$$=\frac{2iT_0}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha_n z}{if+\mu\alpha_n^2}[1-\exp(-ift)\exp(-\mu\alpha_n^2 t)] \tag{21'}$$

$$W_{R\infty}(z,t)=W_{i\infty}(z,t)\exp(-ift)$$

$$=\frac{T_0}{2\beta_f\mu}(1+i)\exp\{-(1+i)\beta_f z\} \tag{23'}$$

解(21)'は，有限水深 h の海の上を海面での応力が y 方向に T_0 をもつ風が $t=0$ で吹き始めたときの，吹送流の鉛直構造の時間変動を表し，解(23)'は，水深が非常に深い海の上を同様の風が吹いて時間減衰項を省いた場合（時間経過と共に0に収束したという意味ではないことに注意）のもので，解の中には時間依存性は無い。

慣性系におけて一様風による無限深の海での解を(15)'に表したが，これは半無限の拡散方程式の解であり，定常解はないと記した。では，(21)'を無限深の場合に変換したらどのようになるのであろうか？まず(15)'を導いたときと同様に，(21)'を次のように書き改める。

$$W_{R\eta}(z,t)=\frac{2iT_0}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha_n z}{if+\mu\alpha_n{}^2}(if+\mu\alpha_n{}^2)\int_0^t \exp\{-(if+\mu\alpha_n{}^2)\,tdt\} \tag{22-1}$$

さらに，

$$W_{R\eta}(z,t)=\frac{2iT_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\alpha_n z\cdot\left(\frac{\pi}{\mathrm{h}}\right)\int_0^t \exp\{-(if+\mu\alpha_n{}^2)\,tdt\}$$
$$=\frac{2iT_0}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\alpha z\int_0^t \exp\{-(if+\mu\alpha^2)\,t\}\,dtd\alpha$$
$$=\frac{2iT_0}{\pi}\int_0^t \exp(-ift)\int_0^{\infty}\exp(-\mu\alpha^2 t)\cos\alpha zd\alpha dt$$

ただし，$\alpha_n=(2n+1)\pi/2h$ を α とおき，$d\alpha=\pi/h$ としている。ここでも(15)'を求めるときに用いた積分の公式を用いると，水深が無限大の場合の吹送流 $W_{R\eta}(z,t)$ は次のように書き表すことができる。

$$W_{R\eta}(z,t)=\frac{iT_0}{\sqrt{\pi\mu}}\int_0^t\frac{\exp\{-(ift+z^2/4\mu t)\}}{\sqrt{t}}dt \tag{22-2}$$

この式は，y 方向に一様な風が突然に吹き始めた場合の吹送流の解として知られており，解曲線であるホドグラフは，海洋物理学の教科書でよく見かける[3),4)]。なお，この解は，(15)'の解にDuhamelの方法を適用し，慣性系で y 方向に一様に吹く応力を，回転系で y 方向に一様に吹くものに相当する $iT_0\exp(ift)$ に変換し，さらに自転効果を表す $\exp(-ift)$ を乗じることによっても得ることができる。さて，(15)'のところでも記したが，そこで“定常解はない”としたことと同様に，(22-2)の場合においても定常解は無いと考えられる。つまり，(22-2)を $t\to\infty$ にしたからといって(23)'になるとはいえないということである。(15)'の非回転系において，一方向流がどんどん深部に浸透して流れが0になることはないということは，回転系においては，慣性流は時間経過と共に深部に浸透して0になることはないということに相当する。Gillの記述や解(6)はこのことに対応づけられる。

さて，解(23)'などの β_f の逆数は，一般にEkman境界層の代表寸法といわれ，その π （＝3.14159265358979……）倍の深度をEkmanの摩擦影響深度と呼んでいる。この厚さを実質的なEkman境界層厚ということもある。(23)と(23)'によってEkman境界層は，回転Stokes境界層と物理的に同じものであることがわかる。従って，Ekman層内に生じた吹送流は摩擦影響深度より深いところには伝わりにくいことも明らかである。

また，(23)の解説において，非回転系においては，回転する風応力に対して海面の吹送流は45°の位相遅れで反時計廻りに回転すると記したが，そのときに生じる方向のずれは，海面の吹送流の方向が風応力から時計廻りに45°ということになり，このことが“風応力に対して海面での吹送流の向きが45°時計廻りに偏向する”というEkman吹送流の特徴をそのまま裏付けている。

境界層が形成するシアー領域はこのように表層付近に留まるが，慣性円運動に関してはこの解法のプロセスからもわかるように，鉛直粘性率 μ によって時間と共に深いところにまで拡散していくことになる。ということは，拡散現象からも推測されるように，吸収するものがない限り鉛直積分量は保存され，結果的に，流れを鉛直積分した流量は減衰して消えることなく，式(6)で示したように，体積輸送が形成する慣性円運動は維持されたままとなる。繰り返しになるが，時間が経過したからといって，(22－2)が(23)'に収束するわけではないことを暗に示している。

これらのことを踏まえて，ここで再びEkman輸送について検討する。解(6)と(7)は y 方向に海面応力 τ_s の風が与えられたときの，摩擦がない場合とある場合の体積輸送の時間変化を表すものであるが，それを慣性系から見るためには，$\exp(ift)$ を乗じればよいことになる。そうすると，(6)と(7)は次のような慣性系から見た場合の体積輸送に変換される。

$$Q_i(t)=\frac{T_0}{f}[\exp(ift)-1] \tag{6'}$$

$$Q_{Fi}(t)=\frac{T_0}{R^2+f^2}(f+iR)[\exp(ift)-\exp(-Rt)\}] \tag{7'}$$

これらの解は，境界条件(20)，つまり，$t=0$ で y 方向に T_0 の応力が与えられ，それが同じ強さのままに反時計廻りに方向を変えていくというもので，風の回転的な振動の影響は残り続けるが，初期の起動による影響は(6)'では摩擦がないために[ ]内の－1として残ることになる。また，摩擦抵抗を考慮した(7)'においては $-\exp(-Rt)$ の形で減衰していく。回転系においては $\exp(-ift)$ を乗じるわけであるから，摩擦がない場合は慣性円運動はそのまま残

り，摩擦がある場合には慣性円運動は減衰して消滅することになる。慣性円運動はEkman螺旋とは無関係に深部に拡散伝搬されるものであり，摩擦がない場合に慣性円運動が消え去らないことは，(22-2)が時間の経過によって(23)'に収束するわけではないことと関連している。

上層に混合層が形成された場合の回転系の吹送流

Gillの教科書[6]の中では，混合層の流動がその下層に伝わりにくいとして，体積輸送量は慣性円運動を形成して消え去ることはないとしているが，ここでその場合の吹送流について補足的に記しておく。

回転系において，上層の混合層の厚さをHとし，海面をy方向に一様な風（風応力τ_s）が吹き始め，水深Hでは摩擦はない$(-\mu\partial W_R/\partial z=0)$と仮定する。運動方程式は(20)のとおりである。解法については，方程式(8)と同様に$W_R(z,t)=W_{R1}(z)-W_{R2}(z,t)$のように，定常解と減衰解からなるとし，上記のような手順を追うと，次のような解を導くことができる。

$$W_R(z,t)=\frac{\tau_s}{Hf}\left[1-\exp(-ift)\right]+\frac{2i\tau_s}{\mu H}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\exp\{-(\mu\gamma_n^2+if)t\}}{2i\beta_f^2+\gamma_n^2}\cos\gamma_n z \tag{24}$$

ここで新たに現れたγ_nは，$z=0$と$z=H$における境界条件から定まる固有値を表し，$n\pi/H$のことで，式(13)の固有値α_nを求めるときと同じ手順に従って得ることができる。$n=0$のとき，つまり，γ_0は0となることから，解の内容をわかりやすくするために，$n=0$の項はΣの外に出して表した。この解を鉛直方向に$z=0$から$z=H$まで積分すると，右辺の第2項は消えて(6)の体積輸送量に等しくなる。さらに，$t\to\infty$のときの解は，

$$W_R(z,t\to\infty)=\frac{\tau_s}{Hf}\left[1-\exp(-ift)\right]+\frac{2i\tau_s}{\mu H}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\gamma_n z}{2i\beta_f^2+\gamma_n^2} \tag{25}$$

のように収斂する。また，定常解とした$W_{R1}(z)$は，(25)の$\exp(-ift)$を除去したときの解，つまり，慣性周期平均したものに等しいことは言うまでもない。くどいかもしれないが，混合層の厚さが摩擦深度よりも深いときには，定常状態においては，定常解とされているEkman螺旋を形成する吹送流の廻りを，(24)や(25)の右辺第1項で表される混合層厚に反比例した強さの慣性円運動を描き続けるということになる。この節は，本来の趣旨からすれば余分な解説かもしれないが，査読者のコメントに従って，この論文の主旨をより深く理解していただきたいとの思いもあって，簡単ではあるが加筆した。

おわりに

日本海洋学会が主催する定例の春季大会や秋季大会においてすら，一流の海洋研究者が「風が卓越したことによって海水は右方向に運ばれたはずで……」というようなことを度々述べている。回転系においては，自転効果に馴染むまでには時間が必要であり，馴染んだら慣性系の中を慣性運動するということは，基礎物理学の力学を思い起こせば当たり前のことである。摩擦抵抗が大きい沿岸海域とはいえ，自転効果に馴染むまでの時間や慣性運動が減衰されていくプロセスなどは現象を議論する上で不可欠と考える。

以上，非常に単純化した運動方程式ではあるが，その解析をとおしてEkman吹送流の基本的な性質を考察・検討した。Ekman境界層のメカニズムは振動流中のStokes境界層と同じものであることが明らかとなり，さらに，本解析の目的の一つであったEkman吹送流の定常解とEkman輸送の定常解の矛盾も要領を得たのではないかと思われる。単純化したために実際の現象との比較には問題が残るが，沿岸海域においても慣性円運動は生成されやすいという報告[9]を裏づけており，複雑な沿岸海域の現象を理解するためにも，基本的なメカニズムやプロセスを整理しておく意義は十分にあると考えている。

謝　辞

最近の海洋物理学の研究においては，流体力学の基本を無視した論文も少なからず見受けられます。特にコンピュータが高精度で扱いやすい道具となり，簡単に答えが得られるような昨今においては，メカニズムやプロセスの理解とその解説は不可欠と考えます。東京水産大学（現在の東京海洋大学）の故齋藤泰一教授は，数値シミュレーションが普及する以前の40年近くも前から，数値計算の問題点を懸念され，誤差や不確定な要素を伴う数値計算に際しては理論解析による根拠とメカニズムの把握は不可欠であることを説かれておられました。私自身も，微分ではな

く差分（割り算）を扱う流体の数値計算において，オイラーの運動方程式に現れる非線形項の扱い方に疑問を抱いています。本研究は，非常に古いテーマですが，齋藤先生のご指導と教えに従って吹送流の基本的な振舞いをまとめてみました。今となっては，齋藤先生への感謝の言葉は届きませんが，研究をすることではなく，業績を上げることが目的かと思われるような風潮の中で，自然に対して真摯で思慮深い先生のお話を思い出すにつけ，先生からのコメントを頂けないことが残念です。

参考文献

1）岸本充史，安田秀一，鬼塚　剛，高島創太郎，湯浅豊年：周防灘豊前海における溶存酸素変動と海洋構造について－2005年夏季の15日間定点係留観測から－．水大校研報，56，47-60（2007）

2）H. B. Fischer : Mass transport mechanism in partially stratified estuaries. *J. Fluid Mech.*, 53, 671-687（1972）

3）A. Defant : Physical Oceanography, Vol. 1 , Pergamon Press, Oxford, 729pp.（1961）

4）G. Neumann, W. J. Pierson, Jr. : Principle of Physical Oceanography, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 545. pp.（1966）

5）万田敦昌，兼原壽生，青島　隆，筒井博信，木下　宰，中田英昭，柳　哲雄：有明海中央部における物質輸送過程の季節変動．海の研究，15,465-477（2006）

6）D.M.Lewis, S. E. Belcher : Time-dependent, coupled, Ekman boundary layer solutions incorporating Stokes drift. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 37, 313-351（2004）

7）A. E. Gill : Atmospheric-Ocean Dynamics.Academic Press, London, 662pp.（1982）

8）H. Lamb : Hydrodynamics6th ed.Cambridge Univ. Press, London, 738pp.（1932）

9）安田秀一：慣性流や海陸風による吹送流の算出に関する試み－沿岸域で定点観測した15日間データの活用－．水大校研報，56，10-20（2007）